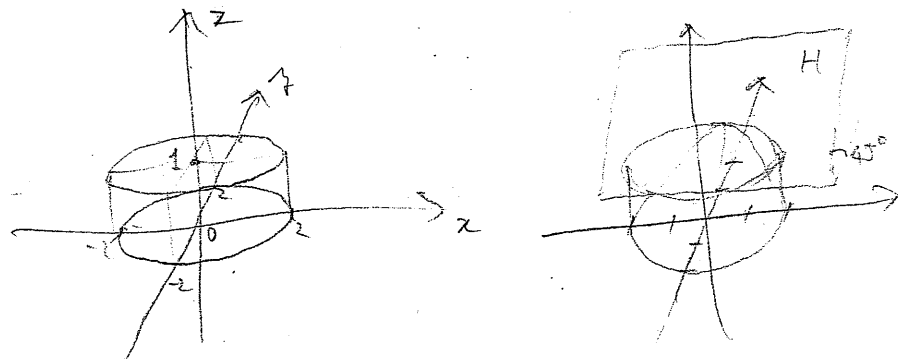


5

次の式で与えられる底面の半径が2, 高さが1の円柱 C を考える.

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$$

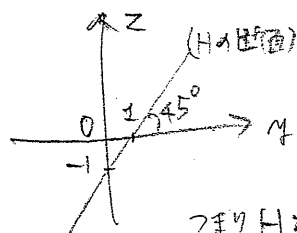
xy 平面上の直線 $y=1$ を含み, xy 平面と 45° の角をなす平面のうち, 点 $(0, 2, 1)$ を通るものを H とする. 円柱 C を平面 H で二つに分けるときの, 点 $(0, 2, 0)$ を含む方の体積を求めよ.



z の平面に平行で点 $(t, 0, 0)$ を通る平面の方程式は $x=t$ と表される.

任意の実数 t について平面 $x=t$ に C を切り取った

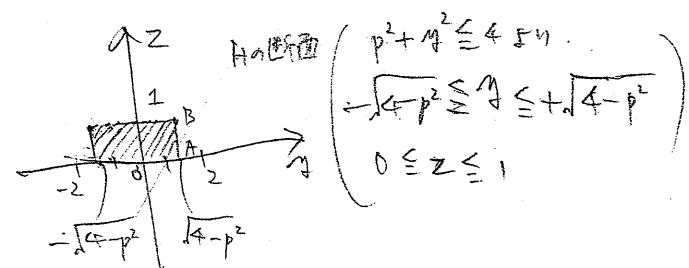
平面 H の断面は



つまり $H: z=y-1, x$ は任意の値

平面 $x=p$ ($0 \leq p \leq 2$) において切りとられる

円柱 C の断面は下図の斜線部



そこで点 $A(p, \sqrt{4-p^2}, 0)$, $B(p, \sqrt{4-p^2}, 1)$, $O'(p, 0, 0)$ とする

H の断面と C の断面の図形が交わるところは辺 OA と辺 AB (両端含み)

ただし $\sqrt{4-p^2} < 1$ つまり $\sqrt{3} < p \leq 2$ のときは H の断面と C の断面の図形は交わらない

$0 \leq p \leq \sqrt{3}$ のとき

H の断面において切りとられる C の断面の図形のうち, 点 A を含むものの面積は,

C の断面図より $\frac{1}{2}(\sqrt{4-p^2}-1)^2$ ①

円柱 C も平面 H も円柱 C を平面 H において分けると2つの立体を
 $y-z$ 平面に関して対称な形が,

求める体積は①より

$$2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} (\sqrt{4-x^2}-1)^2 dx$$

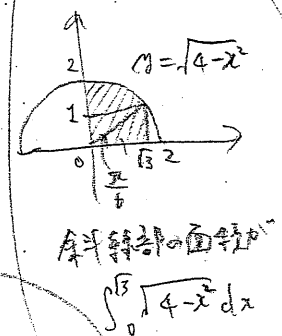
$$= \int_0^{\sqrt{3}} (4-x^2-2\sqrt{4-x^2}+1) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5x \right]_0^{\sqrt{3}} - 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{3} + 5\sqrt{3} - 2 \left(2\pi \times \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \quad \left(\frac{4\pi}{3} \right)$$



斜線部の面積が

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$$