

2 自然数 n に対して

$$I_n = \int_0^1 x^2 |\sin n\pi x| dx$$

とおく。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

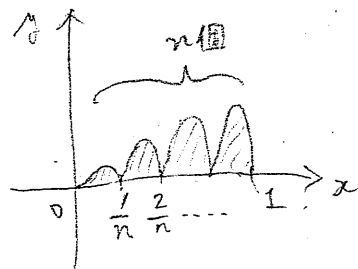


図1 ($y = x^2 |\sin n\pi x|$)

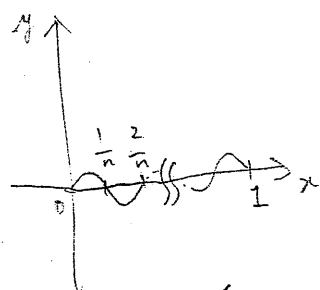


図2 ($y = \sin n\pi x$)

図2より $\sin n\pi x$ の値は $\frac{1}{n}$ の奇数倍で正から負へ、
 $\frac{1}{n}$ の偶数倍で負から正へ変化する。

n は偶数と奇数とに分けて定義しても $n \rightarrow \infty$ とすれば両方同じになる。よって n を
 偶数とすると

$$\frac{2k-2}{n} \leq x \leq \frac{2k-1}{n} \quad (k=1, 2, 3, 4, \dots, \frac{n}{2})$$

このとき $\sin n\pi x \geq 0$

$$\frac{2k-1}{n} \leq x \leq \frac{2k}{n} \quad (k=1, 2, 3, 4, \dots, \frac{n}{2})$$

このとき $\sin n\pi x \leq 0$

$$I_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k-2}{n}}^{\frac{2k-1}{n}} x^2 \sin n\pi x dx - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k-1}{n}}^{\frac{2k}{n}} x^2 \sin n\pi x dx$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} A_k \text{ とする}$$

$$\int_{\frac{2k-2}{n}}^{\frac{2k-1}{n}} x^2 \sin n\pi x dx$$

$$= \left[-\frac{x^2 \cos n\pi x}{n\pi} \right]_{\frac{2k-2}{n}}^{\frac{2k-1}{n}} + \int_{\frac{2k-2}{n}}^{\frac{2k-1}{n}} \frac{2x \cos n\pi x}{n\pi} dx$$

$$= \left[-\frac{x^2 \cos n\pi x}{n\pi} + \frac{2x \sin n\pi x}{n^2 \pi^2} \right]_{\frac{2k-2}{n}}^{\frac{2k-1}{n}} - \int_{\frac{2k-2}{n}}^{\frac{2k-1}{n}} \frac{2 \sin n\pi x}{n^2 \pi^2} dx$$

$$= \left[-\frac{x^2 \cos n\pi x}{n\pi} + \frac{2x \sin n\pi x}{n^2 \pi^2} + \frac{2 \cos n\pi x}{n^3 \pi^3} \right]_{\frac{2k-2}{n}}^{\frac{2k-1}{n}}$$

$$= -\frac{(2k-1)^2 \cos(2k-1)\pi}{n^3 \pi} - \frac{(2k-2)^2 \cos(2k-1)\pi - \pi}{n^3 \pi^2} + \frac{(4k-2) \sin(2k-1)\pi - (4k-4) \sin(2k-1)\pi - \pi}{n^3 \pi^2} + \frac{2 \cos(2k-1)\pi - 2 \cos(2k-1)\pi - \pi}{n^3 \pi^2}$$

$$= \frac{-(8k^2 - 12k + 5)\pi^2 \cos(2k-1)\pi + 2\pi \sin(2k-1)\pi + 4 \cos(2k-1)\pi}{n^3 \pi^3} \quad (\sin(2k-1)\pi = 0)$$

$$\int_{\frac{2k-1}{n}}^{\frac{2k}{n}} x^2 \sin n\pi x dx$$

$$= \frac{-(8k^2 - 4k + 1)\pi^2 \cos(2k-1)\pi + 2\pi \sin(2k-1)\pi + 4 \cos(2k-1)\pi}{n^3 \pi^3}$$

$$= \frac{(8k^2 - 4k + 1)\pi^2 \cos(2k-1)\pi - 2\pi \sin(2k-1)\pi - 4 \cos(2k-1)\pi}{n^3 \pi^3}$$

$$\therefore A_k = \frac{-(16k^2 - 16k + 6)\pi^2 \cos(2k-1)\pi + 8 \cos(2k-1)\pi}{n^3 \pi^3}$$

$$\cos(2k-1)\pi = -1 \text{ である}$$

$$A_k = \frac{(16k^2 - 16k + 6)\pi^2 + 8}{n^3 \pi^3}$$

$$\therefore I_n = \frac{1}{n^3 \pi} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (16k^2 - 16k + 6) - \frac{8}{n^3 \pi^3}$$

$$\frac{n}{2} = 2 \cdot \frac{n}{2} = m \text{ とする}$$

$$\sum_{k=1}^m (16k^2 - 16k + 6) = \frac{8}{3} m(m+1)(2m+1) - 8m(m+1) + 6m$$

$$= \frac{2}{3} m (8m^2 + 12m + 4 - 4m - 4 + 3)$$

$$= \frac{2}{3} m (8m^2 + 8m + 3)$$

$$= \frac{n}{3} (2n^2 + 4n + 3)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3\pi} \left(2 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} \right) - \frac{8}{n^3 \pi^3} \right\}$$

$$= \frac{2}{3\pi} \quad \left(\frac{4}{3} \right)$$

