2 座標平面上に4点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$，$\mathrm{R}(-1,\ 0)$ がある．2点 P，Q を O のまわりに角 θ だけ回転させた点を，それぞれ P_θ，Q_θ とする．ただし，θ は $0<\theta<\pi$ かつ $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ を満たす．4点 P，P_θ，Q_θ，R を頂点とする四角形の面積を $S(\theta)$ とおくとき，以下の各問に答えよ．

(1) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，$S(\theta)$ を求めよ．

(2) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき，$S(\theta)$ を求めよ．

(3) $S(\theta)$ の最大値と，最大値を与える θ の値を求めよ．

[易]
○**2** 座標平面上に4点O(0, 0), P(1, 0), Q(0, 1), R(−1, 0)がある．2点P, QをOのまわりに角θだけ回転させた点を，それぞれP_θ, Q_θとする．ただし，θは$0<\theta<\pi$かつ$\theta \neq \frac{\pi}{2}$を満たす．4点P, P_θ, Q_θ, Rを頂点とする四角形の面積を$S(\theta)$とおくとき，以下の各問に答えよ．

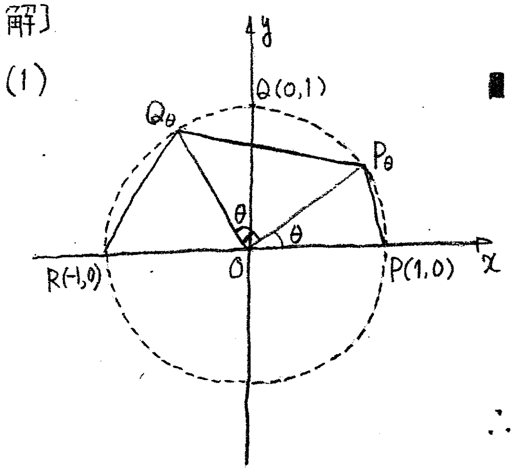
(1) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$のとき，$S(\theta)$を求めよ．

(2) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$のとき，$S(\theta)$を求めよ．

(3) $S(\theta)$の最大値と，最大値を与えるθの値を求めよ．

[解]

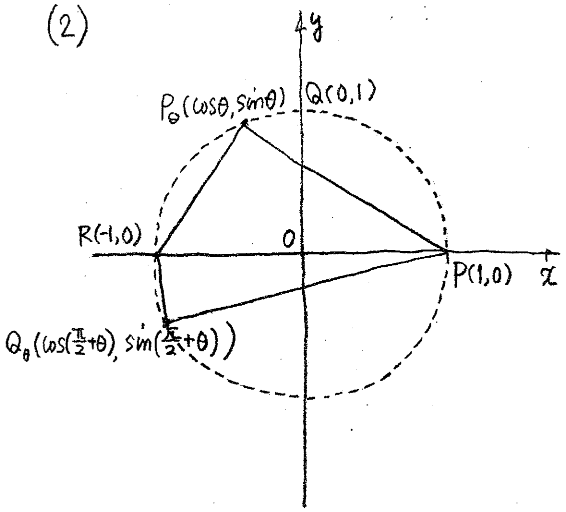
(1)



■ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき

$$S(\theta)=\triangle OPP_\theta+\triangle OP_\theta Q_\theta+\triangle OQ_\theta R$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$$
$$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta+1)\ \text{----(答)}$$

(2)



■ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

$$S(\theta)=\frac{1}{2}PR\sin\theta+\frac{1}{2}PR\left\{-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot2\cdot(-\cos\theta)$$
$$=\sin\theta-\cos\theta\ \text{----(答)}$$

(3) ■ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$ より

$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき 最大値 $S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。…①

■ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

$$S(\theta)=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\frac{\pi}{4}<\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$ より

$\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{3}{4}\pi$ のとき 最大値 $S\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}$ をとる。…②

① ②より $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}>0$ だから $\sqrt{2}>\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

よって $\theta=\frac{3}{4}\pi$ のとき $S(\theta)$の最大値は $\sqrt{2}$ である。----(答)