

2 $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ とし, 方程式 $f(x) = 0$ について考える. このとき, 以下のことを示せ.

- (1) $f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ.
- (2) α が $f(x) = 0$ の解ならば, $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる.
- (3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば, $g(\alpha_1) = \alpha_3$, $g(\alpha_2) = \alpha_1$, $g(\alpha_3) = \alpha_2$ となる.

○ 2 [標] $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ とし, 方程式 $f(x) = 0$ について考える. このとき, 以下のことを示せ.

- (1) $f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ.
 (2) α が $f(x) = 0$ の解ならば, $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる.
 (3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば, $g(\alpha_1) = \alpha_3$, $g(\alpha_2) = \alpha_1$, $g(\alpha_3) = \alpha_2$ となる.

[解]

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$ $f'(x) = 0$ とすると $x^2 - 1 = 0 \therefore x = \pm 1$

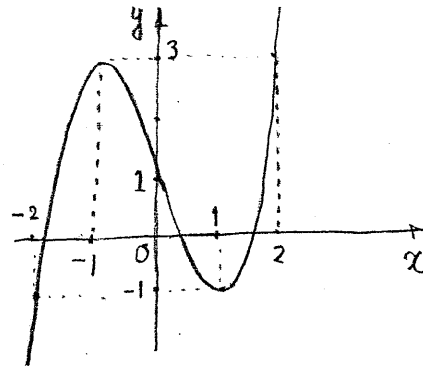
x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$

$f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$

$f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1 < 0$

$f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 > 0$



グラフより

$-2 < x < -1$, $0 < x < 1$, $1 < x < 2$

の範囲に 1 つずつ解をもつから

$f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ. ----(答)

(2) $f(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \dots \textcircled{1}$

$f(g(\alpha)) = f(\alpha^2 - 2) = (\alpha^2 - 2)^3 - 3(\alpha^2 - 2) + 1$

$= \alpha^6 - 3\alpha^4 \cdot 2 + 3\alpha^2 \cdot 4 - 8 - 3\alpha^2 + 6 + 1$

$= \alpha^6 - 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 1$

$= (\alpha^3 - 3\alpha + 1)(\alpha^3 - 3\alpha - 1)$

$= 0 \quad (\because \textcircled{1} \text{より})$

よって $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解である. ----(答)

$$\begin{array}{r} \alpha^3 - 3\alpha - 1 \\ \alpha^3 - 3\alpha + 1 \overline{) \alpha^6 - 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 1} \\ \underline{\alpha^6 - 3\alpha^4 + \alpha^3} \\ -3\alpha^4 - \alpha^3 + 9\alpha^2 - 1 \\ \underline{-3\alpha^4 + 9\alpha^2 - 3\alpha} \\ -\alpha^3 + 3\alpha - 1 \\ \underline{-\alpha^3 + 3\alpha - 1} \\ 0 \end{array}$$

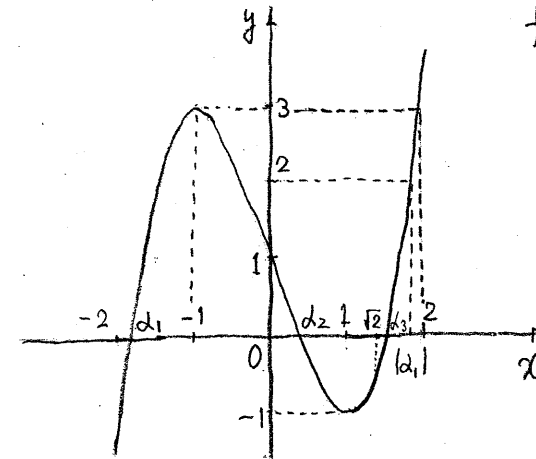
(3) $\alpha_1 < 0 < \alpha_2 < \alpha_3$

$f(|\alpha_1|) = f(-\alpha_1) = -\alpha_1^3 + 3\alpha_1 + 1 \dots \textcircled{2}$

$f(\alpha_1) = \alpha_1^3 - 3\alpha_1 + 1 = 0 \dots \textcircled{3}$

$$\begin{array}{r} -1 \\ \alpha_1^3 - 3\alpha_1 + 1 \overline{) -\alpha_1^3 + 3\alpha_1 + 1} \\ \underline{-\alpha_1^3 + 3\alpha_1 - 1} \\ 2 \end{array}$$

$\textcircled{2} \textcircled{3}$ より $f(|\alpha_1|) = -(\alpha_1^3 - 3\alpha_1 + 1) + 2 = 2$



$f(\alpha_3) = 0$

$f(\alpha_3) < f(|\alpha_1|)$

$1 < \alpha_3 < 2$, $1 < |\alpha_1| < 2$

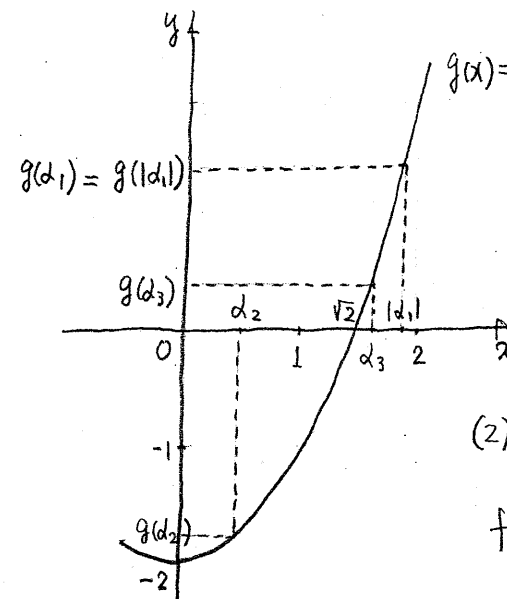
$1 < x < 2$ で $f(x)$ は単調増加だから

$\alpha_3 < |\alpha_1|$

$\therefore \alpha_2 < \alpha_3 < |\alpha_1|$

また $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2} < 0$ だから

$\sqrt{2} < \alpha_3 < |\alpha_1| < 2$



$x > 0$ で $g(x) = x^2 - 2$ は単調増加だから

$\alpha_2 < \alpha_3 < |\alpha_1|$ のとき

$g(\alpha_2) < g(\alpha_3) < g(|\alpha_1|) = g(\alpha_1)$

(2) より $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解だから

$f(x) = 0$ の解が $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ のとき

$g(\alpha_2) = \alpha_1$

$g(\alpha_3) = \alpha_2$

$g(\alpha_1) = \alpha_3$ となる ----(答)