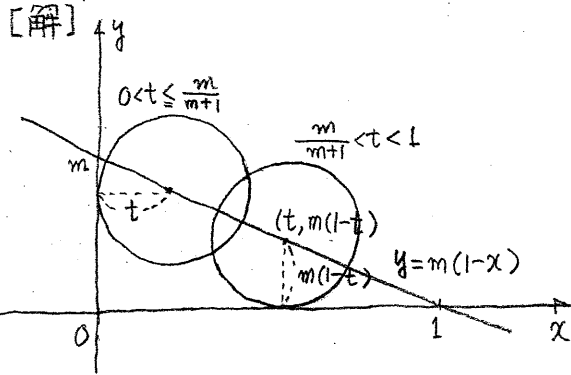


- 4 座標平面上の第1象限 $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ に含まれている円で中心は直線 $y = m(1 - x)$ (m は正の定数) 上にあり x 軸あるいは y 軸に接しているものを考える. このような円で中心の x 座標が t であるものを C_t で表すことにする. 次の問いに答えよ.
- (1) 円 C_t の方程式を求めよ.
 - (2) 円 C_t が y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする. $V(t)$ を求めよ.
 - (3) $0 < t < 1$ の範囲で $y = V(t)$ のグラフをかき, $y = V(t)$ が最大となる t の値を求めよ.

④ 座標平面上の第1象限 $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ に含まれている円で中心は直線 $y = m(1-x)$ (m は正の定数) 上にあり x 軸あるいは y 軸に接しているものを考える。このような円で中心の x 座標が t であるものを C_t で表すことにする。次の問いに答えよ。

- (1) 円 C_t の方程式を求めよ。
 (2) 円 C_t が y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。 $V(t)$ を求めよ。
 (3) $0 < t < 1$ の範囲で $y = V(t)$ のグラフをかき、 $y = V(t)$ が最大となる t の値を求めよ。



C_t の中心 $(t, m(1-t))$ と x 軸, y 軸との距離が小さい方が円の半径である。

- (1) $t \leq m(1-t)$ のとき
 $(1+m)t \leq m$ すなわち $0 < t \leq \frac{m}{m+1}$ のとき

$$(x-t)^2 + \{y - m(1-t)\}^2 = t^2$$

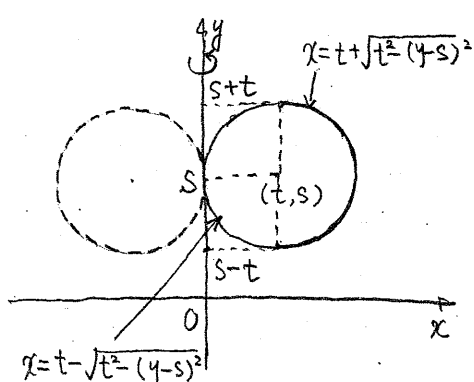
$$\frac{m}{m+1} < t < 1 \text{ のとき}$$

$$(x-t)^2 + \{y - m(1-t)\}^2 = m^2(1-t)^2$$

$$\blacksquare 0 < t \leq \frac{m}{m+1} \text{ のとき } (x-t)^2 + (y-m+mt)^2 = t^2 \quad \dots (\text{答})$$

$$\blacksquare \frac{m}{m+1} < t < 1 \text{ のとき } (x-t)^2 + (y-m+mt)^2 = m^2(1-t)^2$$

- (2) $\blacksquare 0 < t \leq \frac{m}{m+1}$ のとき



$$S = m(1-t) \text{ とおく}$$

$$\text{中心 } (t, S)$$

$$(x-t)^2 + (y-S)^2 = t^2$$

$$x-t = \pm \sqrt{t^2 - (y-S)^2}$$

$$\therefore x = t \pm \sqrt{t^2 - (y-S)^2}$$

$$V(t) = \pi \int_{S-t}^{S+t} (t + \sqrt{t^2 - (y-S)^2})^2 dy - \pi \int_{S-t}^{S+t} (t - \sqrt{t^2 - (y-S)^2})^2 dy$$

$$= \pi \int_{S-t}^{S+t} [t^2 + 2t\sqrt{t^2 - (y-S)^2} + \{t^2 - (y-S)^2\} - t^2 + 2t\sqrt{t^2 - (y-S)^2} - \{t^2 - (y-S)^2\}] dy$$

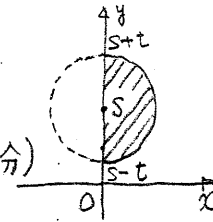
$$= 4\pi t \int_{S-t}^{S+t} \sqrt{t^2 - (y-S)^2} dy \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \sqrt{t^2 - (y-S)^2} = x \quad (x > 0) \text{ とおくと}$$

$$t^2 - (y-S)^2 = x^2 \text{ より } x^2 + (y-S)^2 = t^2$$

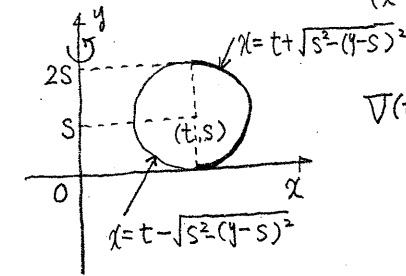
$$\int_{S-t}^{S+t} \sqrt{t^2 - (y-S)^2} dy = \frac{\pi}{2} t^2 \quad (\text{半径 } t \text{ の円の面積の半分})$$

$$\therefore V(t) = 4\pi t \cdot \frac{\pi}{2} t^2 = 2\pi^2 t^3$$



$$\blacksquare \frac{m}{m+1} < t < 1 \text{ のとき}$$

$$(x-t)^2 + (y-S)^2 = S^2 \text{ より } x = t \pm \sqrt{S^2 - (y-S)^2}$$



$$V(t) = \pi \int_0^{2S} (t + \sqrt{S^2 - (y-S)^2})^2 dy - \pi \int_0^{2S} (t - \sqrt{S^2 - (y-S)^2})^2 dy$$

$$= 4\pi t \int_0^{2S} \sqrt{S^2 - (y-S)^2} dy = 4\pi t \cdot \frac{1}{2} \pi S^2 = 2\pi^2 t S^2$$

$$= 2\pi^2 t \cdot m^2(1-t)^2$$

半径 S の円の面積の半分

以上より

$$\blacksquare 0 < t \leq \frac{m}{m+1} \text{ のとき } V(t) = 2\pi^2 t^3$$

$$\blacksquare \frac{m}{m+1} < t < 1 \text{ のとき } V(t) = 2\pi^2 m^2 t(1-t)^2 \quad \dots (\text{答})$$

(3) $V(t) = 2\pi^2 m^2 t(1-t)^2$

$$V'(t) = 2\pi^2 m^2 \{(1-t)^2 + t \cdot 2(1-t) \cdot (-1)\} = 2\pi^2 m^2 (1-t)(1-t-2t) = 2\pi^2 m^2 (t-1)(3t-1)$$

$$V'(t) = 0 \text{ とすると } t = \frac{1}{3}$$

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$V'(t)$		+	-
$V(t)$		$\nearrow$	$\searrow$

$$V\left(\frac{1}{3}\right) = 2\pi^2 m^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27} \pi^2 m^2$$

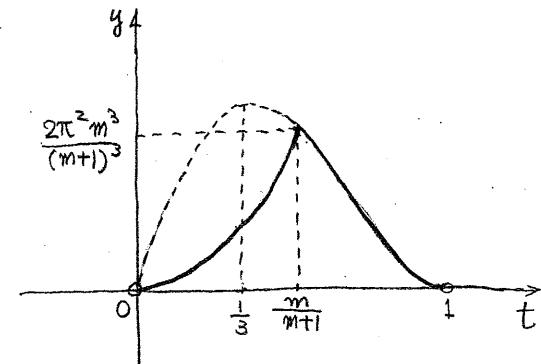
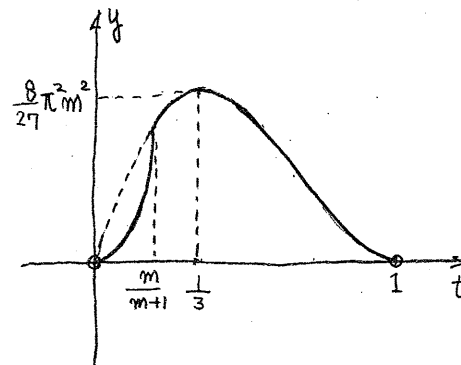
$$\blacksquare \frac{m}{m+1} < \frac{1}{3} \text{ のとき}$$

$$3m < m+1 \text{ すなわち } 0 < m < \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$\blacksquare \frac{1}{2} \leq m \text{ のとき}$$

$$V\left(\frac{m}{m+1}\right) = 2\pi^2 \frac{m^3}{(m+1)^3}$$

(答)



$V(t)$ が最大となるのは

$$0 < m < \frac{1}{2} \text{ のとき } t = \frac{1}{3} \quad (\text{最大値 } \frac{8\pi^2 m^2}{27})$$

$$\frac{1}{2} \leq m \text{ のとき } t = \frac{m}{m+1} \quad (\text{最大値 } \frac{2\pi^2 m^3}{(m+1)^3})$$

----- (答)